

علامه

إذا كانت المتسلسلة المعطاة في المبرهنة السابقة هي السلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  متقاربة عند النقطة  $z_1$  عندئذ تكون هذه المتسلسلة متقاربة عند النقطة  $z$  حيث  $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$

وما إذا كانت النقطة  $z$  في خارج دائرة  $|z - z_0| = |z_1 - z_0|$  التي مركزها  $z_0$  ورفض مظهرها  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$  وبالتالي فإن:

$$|z - z_0|^n \leq |z_1 - z_0|^n \quad \text{و} \quad \frac{1}{|z_1 - z_0|^n} \leq \frac{1}{|z - z_0|^n}$$

وبمباختيار المقارنة تكون المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$  متقاربة أي أن متسلسلة القوى ذات الحدود السابقة تتقارب في خارج دائرة الدالة التي مركزها  $z_0$  ورفض مظهرها  $|z - z_0| = |z_1 - z_0|$

التقارب المنتظم

لتكن  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متسلسلة مقاربة ودائرة التقارب لها هي  $C$  عندئذ يكون مجموع هذه المتسلسلة هو عبارة عن دالة

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

أي أن:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + R_N(z)$$

أي أن:

$$R_N(z) = S(z) - S_N(z)$$

نقول عن متسلسلة القوى (1) أنها مقاربة بانتظام إذا وفقط إذا كان  $\epsilon$  موجباً غير طبيعي  $N$  يتعلق فقط و فقط  $N$  بحيث أن

$$|R_N(z)| < \epsilon \quad \text{طالما أن} \quad |z| < \rho(\epsilon)$$

لتكن  $z$  نقطة من داخل دائرة التقارب ولنثبت أن:

إذا  $|z| \leq \rho$  من أجل أي عدد طبيعي  $N$ ،  $M$ ، بحيث أن  $M > N$ ، بحيث يكون:

$$\left| \sum_{n=N}^M a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^M |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z|^n$$



$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z|^n = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n|$$

نجعل  $M$  ضمن كذا اللائحة يجب ان:

$$Q_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^M |a_n z^n| = \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n|$$

وبما ان

$$\sum_{n=N}^M |a_n z^n| \leq Q_N$$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| \leq Q_N$$

وبالتالي فان

وبالتالي فان

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} |a_n z^n| = R_N(z)$$

$$|R_N(z)| \leq Q_N$$

وبما ان المتسلسلة  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة هذا يعني ان الباقي النوني اي

$Q_N$  يعني كذا الرمز عندما  $N$  ضمن كذا اللائحة طبقاً لـ لي اي انه

من اجل كل  $\epsilon > 0$  يوجد عدد طبيعي  $N(\epsilon)$  بحيث ان  $\epsilon < |Q_N|$

من اجل كل  $N > N(\epsilon)$  وهذا يعني ان التراجعة  $\epsilon$  من اجل كل  $\epsilon > 0$

يوجد عدد طبيعي  $N$  يتولد فقط بـ  $\epsilon$  بحيث ان  $\epsilon < |R_N(z)|$

طالما ان  $N(\epsilon) > N$  مما يعني حسب التعريف ان المتسلسلة

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة بانتظام لهذا الاستدلال فكون قد اثبتنا صحة

المبرهنة الانتهائية

**مبرهنة:**

اي متسلسلة قوى  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  متقاربة بانتظام

على دوائر اي دائرة لغز في داخلية دائرة المقارب





201 / /

التاريخ

الموضوع

**مبرهنة:** من سلسلة القوى  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  نختل دالة متصلة عند نقطة  $z_0$

داخلية دائرة المقارب

**البرهان:**

لنقرن ان  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ولنبين ان الدالة  $S(z)$  دالة متصلة  
فقط في  $z_0$  ما لا يحل التعيين من داخلية الدائرة المقارب ولنسب ان الدالة  $S(z)$  متصلة  
في  $z_0$  اي لنثبت ان  $\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = S(z_0)$  اي ان من اجل كل  $\epsilon > 0$

يوجد  $\delta > 0$  و  $\epsilon > 0$   $|S(z) - S(z_0)| < \epsilon$   $|z - z_0| < \delta$  طالما ان

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + R_N(z) \quad S(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n + R_N(z_0)$$

$$S(z) - S(z_0) = S_N(z) - S_N(z_0) + R_N(z) - R_N(z_0)$$

$$|S(z) - S(z_0)| = |S_N(z) - S_N(z_0) + R_N(z) - R_N(z_0)|$$

$$\leq |S_N(z) - S_N(z_0)| + |R_N(z)| + |R_N(z_0)|$$

بما ان  $z_0$  دالة متصلة في  $z_0$  فان  $S_N(z)$  دالة متصلة في  $z_0$  فان  
المقارب استنادا الى المبرهنة السابقة هذا يعني انه

من اجل كل  $\epsilon > 0$  يوجد  $\delta > 0$  بحيث ان  $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \epsilon/3$   $|z - z_0| < \delta$

بما ان  $S_N(z)$  دالة متصلة في  $z_0$  فان  $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \epsilon/3$   $|z - z_0| < \delta$

وذلك لان  $S_N(z)$  دالة متصلة في  $z_0$  فان  $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \epsilon/3$   $|z - z_0| < \delta$

وذلك لان  $S_N(z)$  دالة متصلة في  $z_0$  فان  $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \epsilon/3$   $|z - z_0| < \delta$

من المبرهنة 1-1 وهذا يعني انه دالة متصلة اي انه من اجل كل  $\epsilon > 0$  يوجد  $\delta > 0$

بحيث انه  $|S(z) - S(z_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$   $|z - z_0| < \delta$  طالما ان

$|z - z_0| < \delta$   $|S(z) - S(z_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$  طالما ان

ان  $S(z)$  دالة متصلة في دائرة المقارب

**مبرهنة العكس (تكوني جوارات للمفاضلة بسيطة الزاوية)**

**البرهان:**

اذا كان  $f(z)$  دالة متصلة في العناق المتصلة والبط (وسان

$f(z)$   $z=0$  عندها تكون  $f(z)$  دالة تحليلية

**البرهان:**

$$f(z) = \int_0^z f(t) dt$$





201 / /

التاريخ

الموضوع

وقد أثبتنا في محاضرة سابقة أن  $f$  قابلة للاستقامة  $f(z) = f'(z)$

برهان

إذا كانت سلسلة القوى  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  متقاربة ومجموعها هو  $S(z)$  أي أن  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$  وكانت الدالة  $g(z)$  دالة متصلة على الكفاف المطلقة البسيطة والذي يقع ضمن دائرة التقارب عند  $z=1$

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C g(z) z^n dz$$

الآن

$g(z) S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(z) z^n + R_N(z)$   $\Rightarrow S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + R_N(z)$   
 ليكن  $C$  كفاف صلب يقع ضمن دائرة التقارب عند  $z=1$

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C g(z) z^n dz + \int_C g(z) R_N(z) dz$$

لنثبت بأن متجه التكامل  $\int_C g(z) S(z) dz$  نحو الصفر عندما  $N \rightarrow \infty$  نحو الاستقامة كما أن  $g(z)$  دالة متصلة على الكفاف المطلق والمحدودة عند  $z=1$  تملك قيمتها المطلق على أي أن  $|g(z)| \leq M$   $\forall z \in C$  ولما أن  $R_N(z)$  الباقي الوحدوي لمجموعة مقاربة هذا يعني أن لكل  $\epsilon > 0$  يوجد  $N(\epsilon)$  بحيث أنه  $|R_N(z)| < \epsilon$  طالما أن  $N > N(\epsilon)$  وإذا فرضنا  $L$  لطول القوس، عندئذ  $\left| \int_C g(z) R_N(z) dz \right| \leq M \epsilon L$   
 وهذا يعني أن متجه التكامل  $\int_C g(z) S(z) dz$  نحو الصفر عندما  $N \rightarrow \infty$

ملاحظة 1

من العلاقة الأخيرة نستنتج أنه بإمكاننا مكالمة متسلسلة مقاربة وذلك لمكاملة حدودها حدًا حدًا

ملاحظة 2

فرض أن  $g(z)$  عندئذ من العلاقة الواردة في المبرهنة السابقة

نستنتج أن  $\int_C z^n dz = 0$  ولنا في وباستقادة من العلاقة الواردة في المبرهنة السابقة يكون  $\int_C S(z) dz = 0$

من هذه العلاقة نستنتج وباستقادة من مبرهنة موريرا بأن الدالة  $S(z)$  دالة تحليلية



2000

نقطة ١ :  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  متقاربة كل  $z$  و  $z=0$  :  
 إذا كانت  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  عنده  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$   
 يمكن استنتاجه حدود من المتقاربة حيث هذا

~~6681~~

الإشباع :  
 يمكن C دالة تقع ضمن دائرة المقاييس المناسبة لتوفر النقاط C و D

~~$$g(s) = \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{2s+1}$$~~

كندية يكون الدالة  $\frac{2\pi}{(s-2)^2}$  نقطة من نقاط  $2$  نقطة تقع في داخلية  $\int_C g(s) f(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s) s^n ds$  معرفة مسطرة عند كل نقطة في العلاقة كندية اعتماداً على العلاقة

معرفه و مشتق از سری لافرانژ

مشتق از اتحادیه هم الیافه

$$\int_C g(s) f(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s) s^n ds$$

ای ۱ ن

$$\int_C g(s) s^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{s^n}{(s-2)^2} ds$$

$$\int_C g(s) s(z) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{s(s)}{(s-z)^2} dz$$

في المساعدة في صيغ  $(S-Z)^2$  ~~سوشي~~ ~~المجموعة~~ كذا ان

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{s^h}{(s-z)^2} ds = h z^{h-1}$$

~~$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s)}{(s-z)^2} ds = S'(z)$$~~

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad ; \text{ or } \text{or}$$